854. 一様位相空間ニ就テ

小平　邦彦（東大）

5. 函数空間. $\mathfrak{X}$ ヲ任意ノ空間, $\mathfrak{R}$ ヲ $\{\mathfrak{U}_\alpha(p)\}$ ヲ近傍系トスル uniform space トスル. $\mathfrak{X}$ ヲ domain トシ $\mathfrak{R}$ ヲ range トスルスベテノ函数ノ作ル空間ヲ $\mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ デ現ハス. $\mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ 及ビソノ部分空間ヲ函数空間トヨビ, $\mathfrak{F}$ デ現ハス。

$\mathfrak{F}$ ニ於テハ通常二種ノ一様位相ガ定義サレル。スナハチ

(1) $\mathfrak{U}_\alpha(f_0) = (f;\ f(x) \in \mathfrak{U}_\alpha(f_0(x))$ fur alle $x \in \mathfrak{X})$

デ定義サレタ $\mathfrak{U}_\alpha(f_0)$ ヲ f_0 ノ強イ近傍トイヒ, コノ近傍系ニヨッテ定メラレル $\mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ ノ一様位相ヲ強イ一様位相, 或ハ略シテ strong topology トイフ. コレニ對シテ

(2) $$\mathfrak{U}_{x_1 x_2 \cdots x_l \alpha}(f_0) = (f;\ f(x_j) \in \mathfrak{U}_\alpha(f_0(x_j)),\ 1 \leqq j \leqq l)$$

デ定義サレタ $\mathfrak{U}_{x_1 x_2 \cdots x_l \alpha}(f_0)$ ヲ f_0 ノ弱イ近傍トイヒ, コノ近傍系デ定メラレル一様位相ヲ弱イ一様位相, 或ハ weak topology トイフ。

$f \in \mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ ニ對シテ, $p^x = f(x)$ トオケバ, f ハ $p = (p^x)$ ナル直積空間:

(3) $$\prod_{x \in \mathfrak{X}} \otimes \mathfrak{R}^x, \quad \mathfrak{R}^x = \mathfrak{R}$$

ノ点デ現ハサレル. コノ様ナ意味デ $\mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ ハイクツカノ $\mathfrak{R}$ ノ

直積ト考ヘラレル. $\mathfrak{R}^*$ ノ弱イ一様位相ハ, $\mathfrak{R}^*$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ直積ト考ヘタトキノ一様位相ニ他ナラナイ。

従ッテ直積ニ関スル定理カラ, 例ヘバ次ノ定理ガ得ラレル。

定理 1. $\mathfrak{R}$ ガ *totally bounded* ナラバ $\mathfrak{R}^*$ ハ *weakly totally bounded* デアル。

上記ノ如キ種々ノ一様位相ヲ統一的ニ論ズルタメニハ, 次ノ様ナ概念ヲ導入スルノガ有効デアル: (X) ヲ $\mathfrak{X}$ ノ *additive*[1] ナ部分集合属トシ

$$(4) \quad \sum_{X \in (X)} X = \mathfrak{X}$$

ナルモノトスル. コノ様ナ (X) ガ與ヘラレタトキ,

$$(5) \quad \mathfrak{U}_{X\alpha}(f_0) = (f;\ f(x) \in \mathfrak{U}_\alpha(f_0(x)),\ x \in X)$$

ニヨッテ定義サレタ $\mathfrak{U}_{X\alpha}(f_0)$ ヲ f_0 ノ (X)-近傍ト名付ケ, $\{\mathfrak{U}_{X\alpha}(f)\}$ ナル近傍系ニヨッテ定メラレル $\mathfrak{R}^*$ ノ一様位相ヲ (X)-一様位相トヨブコトニスル。$\mathfrak{R}^*$ ガ $\{\mathfrak{U}_{X\alpha}(f)\}$ ナル近傍系ニヨッテ *uniform space* トナルコトハ容易ニ確メラレル. (X) トシテ $\mathfrak{X}$ ノミヨリ成ル集合属ヲトレバ, (X)-一様位相ハ強イ一様位相ト一致シ, (X) ヲ $\mathfrak{X}$ ノ有限部分集合ノ全体トスレバ, (X)-一様位相ハ弱イ一様位相トナル。

(X) ト (X') ガ與ヘラレタトキ, 如何ナル X モ或ル X' ニ含マレルナラバ, (X) ハ (X') ニ含マレルトイヒ

1) 有限加法的トスル。

(6) $\quad (\mathfrak{X}) \subset (\mathfrak{X}')$

トカクコトニスル。明カニ $(\mathfrak{X}) \subset (\mathfrak{X}')$ ナラバ，$(\mathfrak{X})$-一様位相ハ $(\mathfrak{X}')$-一様位相ヨリ弱イ。弱イ一様位相ハスベテノ $(\mathfrak{X})$ 一様位相ヨリモ弱ク，強イ一様位相ハスベテノ $(\mathfrak{X})$ 一様位相ヨリモ強イ。

定理2. $(\mathfrak{X})$-fundamental ナ d.s.p. (f_λ) ガ各 x ニ於テ $\lim_\lambda f_\lambda(x) = f(x)$ ナラバ，$(\mathfrak{X})$-一様位相ノ意味デモ $\lim_\lambda f_\lambda = f$ デアル。

証明. 任意ニ與ヘラレタ $\mathfrak{U}_{x\sigma}$ ニ對シテ，$\mathfrak{U}_\tau^2 \subset \mathfrak{U}_\sigma$ ナル $\mathfrak{U}_\tau$ ヲトル。

λ_0 ヲ，$\lambda, \mu > \lambda_0$ ニツイテハ $f_\lambda \in \mathfrak{U}_{x\tau}(f_\mu)$ ナル如ク定メル。

$\lambda > \lambda_0$ ヲ任意ニ定メ，μ ヲ各 $x \in \mathfrak{X}$ ニ對シテ $f_\mu(x) \in \mathfrak{U}_\tau(f(x))$ ナルヤウニ定メレバ，$x \in \mathfrak{X}$ ニ對シテ

$$f_\lambda(x) \in \mathfrak{U}_\tau(f_\mu(x)) \subset \mathfrak{U}_\tau^2(f(x)) \subset \mathfrak{U}_\sigma(f(x))$$

トナル。即チ $f_\lambda \in \mathfrak{U}_{x\sigma}(f)$. 故ニ $(\mathfrak{X})$ 一様位相ノ意味デ $\lim_\lambda f_\lambda$ デアル。

明ラカニ $(\mathfrak{X})$-一様位相ノ意味ガ $\lim_\lambda f_\lambda = f$ ナラバ各 x ニ於テ $\lim_\lambda f_\lambda(x) = f(x)$ デアルカラ

定理2'. f_λ ガ f ニ $(\mathfrak{X}')$-收斂スルトキ，(f_λ) ガ $(\mathfrak{X})$-fundamental ナラバ，ソレハ f ニ $(\mathfrak{X})$-收斂スル。

定理3. $\mathfrak{R}$ ガ complete ナラバ，$\mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ ハ，任意ノ

$(\mathfrak{X})$ ニツイテ，$(\mathfrak{X})$-complete デアル。

証明：(f_λ) ヲ $(\mathfrak{X})$-fundamental ナ d.s. ト スレバ，各 x ニツイテ $(f_\lambda(x))$ ハ fundamental デアル．故ニ $\lim_\lambda f_\lambda(x) = f(x)$ ガ存在スル．$f = f(x)$ ヲカクノ如ク定メレバ，定理1ニヨッテ $\lim_\lambda f_\lambda = f$．故ニ $\mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ ハ $(\mathfrak{X})$-complete デアル。

全ク同様ニシテ

定理3_2．$\mathfrak{R}$ ガ topologically complete ナラバ，$\mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ ハ $(\mathfrak{X})$-topologically complete デアル。

定理4．函数空間 $\mathfrak{F}$ ガ $(\mathfrak{Y})$-totally bounded ナラバ，$\mathfrak{F}$ ニ於テハ，任意ノ $(\mathfrak{X})$-一様位相ハ $(\mathfrak{Y})$-一様位相ト一致スルカ，然ラザレバ $(\mathfrak{Y})$ 一様位相ヨリ強イ。

証明．[2] 任意ノ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{Y}\alpha}$ ニ對シテ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\tau} \subset \mathfrak{U}_{\mathfrak{Y}\alpha}$ ナル $\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\tau}$ ガ存在スルコトヲ示セバヨイ。コノタメニ或ル $\mathfrak{U}_{\mathfrak{Y}\alpha}$ ガアッテ，$\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\tau} \subset \mathfrak{U}_{\mathfrak{Y}\alpha}$ ナル $\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\tau}$ ガ存在シナカッタト假定シテ矛盾ニ至ルコトヲ示ス．先ヅ τ ヲ

$$\mathfrak{U}_\tau^3 \subset \mathfrak{U}_\alpha$$

---

2) $\mathfrak{F}$ ガ $(\mathfrak{Y})$-complete ナルトキハ，$\mathfrak{F}$ ハ bicompact トナルカラ，$(\mathfrak{Y})$-位相，従ッテ $(\mathfrak{Y})$-一様位相ガ他ノ一様位相ヨリ弱イコトガ直チニ分ル。一般ノ場合ニハ $\mathfrak{F}$ ノ代リニ $\mathfrak{F}$ ノ $(\mathfrak{Y})$-完全化 $\tilde{\mathfrak{F}}$ ヲ考ヘレバ，$(\mathfrak{Y})$-complete ナ場合ニ帰省セシメラレル。ココデハコノ方法ニヨラズニ直接証明シタノデアル。

ナル様ニ定メル，然ルトキハ各 X ニツイテ

$$f_X \in \mathfrak{U}_{X\tau}(g_X), \quad f_X \notin \mathfrak{U}_{Y\alpha}(g_X)$$

ナル f_X, g_X ガ存在スル．(X) ハ $\subset$ ナル関係ヲ〈ト定メレバ，(X) ハ directed set トナッテヰル．故ニ $\mathfrak{F}$ ガ (Y)-totally bounded ダカラ，(X) ト cofinal ナ d. s. (X_Λ) ヲ選ンデ (f_{X_Λ}), (g_{X_Λ}) ガ (Y)-fundamental ナル様ニ出来ル．（Nr. 3，定理 1_2）．従ッテ M ヲ適当ニトレバ，

$\Lambda > M$ ナラバ，$f_{X_\Lambda} \in \mathfrak{U}_{Y\tau}(f_{X_M})$, $g_{X_\Lambda} \in \mathfrak{U}_{Y\tau}(g_{X_M})$

トナル．$f_{X_M} \notin \mathfrak{U}_{Y\alpha}(g_{X_M})$ ヨリ

$$f_{X_M}(y) \notin \mathfrak{U}_\alpha(g_{X_M}(y)), \quad y \in Y$$

ナル y ガアル．然ルニ Λ ヲ適当ニトレバ，$y \in X_\Lambda$ ナラシメルコトガ出来ル。

従ッテ $f_{X_\Lambda} \in \mathfrak{U}_{X_\Lambda \tau}(g_{X_\Lambda})$ ニヨッテ

$$f_{X_\Lambda}(y) \in \mathfrak{U}_\tau(g_{X_\Lambda}(y))$$

トナルカラ

$$\begin{aligned} f_{X_M}(y) \in \mathfrak{U}_\tau(f_{X_\Lambda}(y)) &\subset \mathfrak{U}_\tau^2(g_{X_\Lambda}(y)) \\ &\subset \mathfrak{U}_\tau^3(g_{X_M}(y)), \end{aligned}$$

故ニ

$$f_{X_M}(y) \in \mathfrak{U}_\alpha(g_{X_M}(y))$$

トナル．コレハ矛盾デアル．　——証明終——

コノ定理カラ例ヘバ次ノ定理ガ得ラレル。

定理 4′．$(X) < (Y)$ ナルトキ，$\mathfrak{F}$ ガ (Y)-totally bounded ナラバ，$\mathfrak{F}$ ニ於テ (Y)-一様位相ト (X)-一様位

相ハ一致スル。[3]

$\mathfrak{X}$ガ $\{\mathcal{U}_\alpha(x)\}$ ヲ近傍系トスル一様位相空間ナル場合ヲ考ヘル。コノトキ，一様連続ナ函数カラ或ル函数族 $\mathfrak{F}(\subset \mathfrak{R}^{\mathfrak{X}})$ ハ，與ヘラレタ $\mathcal{V}_\tau$ ニ對シテ，$\mathcal{U}_\alpha$ ヲ適當ニ選ンデ，$x, y \in \mathfrak{X}$ 及ビ $f \in \mathfrak{F}$ ノ如何ニ關セズ，常ニ

(ワ) $\quad x \in \mathcal{U}_\alpha(y)$ ナラバ $\quad f(x) \in \mathcal{V}_\tau(f(y))$

ナラシメ得ルトキ，同程度ニ一様連続デアルトイフ。

定理5. $\mathfrak{R}$ 及ビ $\mathfrak{X}$ ガ共ニ totally bounded ナルトキ，$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ ガ同程度ニ一様連続ナラバ，$\mathfrak{F}$ ハ strongly totally bounded デアル。

証明. 任意ニ $\mathcal{V}_\sigma$ ヲ與ヘテ，$\mathcal{V}_\tau$ ヲ

$$\mathcal{V}_\tau^3 \subset \mathcal{V}_\sigma$$

ナル様ニ定メル. $\mathcal{V}_\tau$ ニ對シテ (ワ) ヲ満足スル $\mathcal{U}_\alpha$ ヲトル. 假定ニヨッテ

$$\mathfrak{X} = \sum_{j=1}^{l} \mathcal{U}_\alpha(x_j)$$

ナル x_j $(j = 1, 2, \cdots\cdots l)$ ガ存在スル. $\mathfrak{F}$ ハ weakly totally bounded デアル.（定理1）. 故ニ

$$\mathfrak{F} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{V}_{x_1 x_2 \cdots\cdots x_l \tau}(f_k)$$

ナル f_k ガ存在スル. スナハチ，任意ノ $f \in \mathfrak{F}$ ニ對シテ

$$f(x_j) \in \mathcal{V}_\tau(f_k(x_j)), \qquad 1 \leqq j \leqq l$$

---

3) 従ッテ，$\mathfrak{F}$ ガ (Y) - totally bounded ナラバ，(Y) - 一様位相ハ弱イ一様位相ト一致スル。

ナル f_k ガアル。任意ノ x ハ或ル $\mathfrak{U}_\alpha(x_j)$ ニ含マレル．
コノトキ

$$f(x)\in\mathfrak{U}_\tau(f(x_j))$$

トナルカラ

$$f(x)\in\mathfrak{U}_\tau(f(x_j))\in\mathfrak{U}_\tau^2(f_k(x_j))$$
$$\in\mathfrak{U}_\tau^3(f_k(x))\subset\mathfrak{U}_\sigma(f_k(x)),$$

スナハチ，$f\in\mathfrak{U}_\sigma(f_k)$ デアル．故ニ

$$\mathfrak{F}=\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{U}_\sigma(f_k)$$

故ニ $\mathfrak{F}$ ハ totally bounded デアル。

6．線形空間． 吾々ハ

1° $|u|_k\geqq 0$，スベテノ k ニツイテ $|u|_k=0$ ナラバ $u=0$，

2° $|u+v|_k\leqq|u|_k+|v|_k$，

3° $|\alpha u|_k=|\alpha||u|_k$， α ハ複素数．

ナル條件ヲ満足スル．函數系 $(|u|_k)$，$u\in\mathfrak{L}$，ノ定義サルタ線形空間 $\mathfrak{L}$ ヲ一般 Banach 空間ト名付ケ，$(|u|_k)$ ヲ $\mathfrak{L}$ ノ Norm 系トヨブ。[1] $\mathfrak{L}$ ニ於テ距離函數系 (ρ_k) ヲ

(2) $\rho_k(u\ \ v)=|u-v|_k$

ニヨッテ定義スル．$\mathfrak{L}$ ハコノ距離函數系ニヨッテ一般距離空

1) convex ナ topological linear space ハスベテ一般 Banach 空間ト考ヘラレル．
Neumann: Topological linear space. l.c.

間トナリ，Nr. 1 — Nr. 5 ノ理論ガ適用サレル。

例トシテ Banach 空間 B ノ bounded linear functional ノ space ヲ考ヘル事トシ，コレヲ $\bar{B}$ トスル。$f \in \bar{B}$ ハ，ソノ linearity ニヨッテ，

(3) $\mathfrak{X} = (x;\ |x| \leqq 1)$

ナル B ノ unit sphere ニ於ケル様子ニヨッテ一意的ニ定マル。ソコデ吾々ハ $\bar{B}$ ヲ $\mathfrak{X}$ ヲ domain トスル函数空間ト考ヘテ $(\mathfrak{X})$－一様位相ヲ導入シ，コレヲ $\bar{B}$ ノ $(\mathfrak{X})$－一様位相ト名付ケル。

(4) $|f|_X = \overline{\mathrm{fin}}_{x \in X} |f(x)|$

ニヨッテ norm 系 $(|f|_X)$ ヲ定義スレバ，$\bar{B}$ ノ $(\mathfrak{X})$－一様位相ハ，コノ norm 系ニヨッテ與ヘラレル。$\bar{B}$ ハスナハチ $(|f|_X)$ ヲ norm 系トスル一般 Banach 空間デアル。コノ意味ノ strong uniform topology ハ

(5) $|f| = \overline{\mathrm{fin}}_{|x| \leqq 1} |f(x)| = \overline{\mathrm{fin}}_{x \in B} |f(x)|/|x|$

ナル norm デ與ヘラレ，通常ノ strong topology ノ定義ト一致スル。weak uniform topology モ通常ノ weak topology ト一致スル。

定理 1. $\mathfrak{F} \subset \bar{B}$ ガ weakly totally bounded ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ，$\mathfrak{F}$ ガ strongly bounded ナルコト，スナハチ $f \in \mathfrak{F}$ ニツイテ $|f| \leqq C < +\infty$ ナル常數 C ガ存在スル事デアル。

証明.[2] 先ヅ $\mathfrak{S}$ ガ weakly totally bounded トスル. 然ルトキハ x_0 ヲ一ツ定メレバ $|f(x_0)|$ ハ f ガ $\mathfrak{S}$ ヲ動クトキ有界デアル。従ッテ

$$|f| = \frac{1}{c} \overline{\lim_{|x| \leqq c}} |f(x)|;$$

$$|f(x)| \leqq |f(x+x_0)| + |f(x_0)|$$

デアルカラ, $|f|$ ガ有界ナコトヲ言フニハ, 或球: $\mathfrak{K} = (x + x_0;\ |x| < c)$ ニ於テ $|f(x)|$ ガ一様ニ有界ナコトヲ示セバヨイ。コノタメニ $|f(x)|$ ガ假ニ如何ナル $\mathfrak{K}$ ニ於テモ一様ニ有界デナイトシテ見ル. 然ルトキハ f_n, $(n=1,2,\cdots\cdots)$ 及ビ, $\mathfrak{K}_n$, $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ

$$\mathfrak{K}_n^b \subset \mathfrak{K}_{n-1}; \quad \lim_n (\mathfrak{K}_n \text{ノ直徑}) = 0$$

且ツ

$$|f_n(x)| \geqq n, \quad x \in \mathfrak{K}_n$$

ナル様ニ定メル事ガ出來ル. B ハ完全デアルカラ, $x_0 = \lim_n \mathfrak{K}_n$ ガ存在スル. x_0 ハスベテノ $\mathfrak{K}_n$ ニ含マレル. 故ニ $\lim_n |f_n(x_0)| = +\infty$. コレハ矛盾デアル。——— 故ニ $|f|$ ハ有界デアル.

逆ニ $\mathfrak{S}$ ガ strongly bounded デアルトスレバ, $x \in \mathfrak{X}$ ノトキ, $f(x)$ ノ range ハ一様ニ有界デアル. 故ニ Nr. 5 定理 1 ニヨッテ, $\mathfrak{S}$ ハ weakly totally bounded デアル。

$\mathfrak{S} \subset \overline{B}$ ガ $(\mathfrak{X})$-totally bounded ナラバ, $\mathfrak{S}$ ニ於テ $(\mathfrak{X})$-一様位相ハ弱イ一様位相ト一致シ, 従ッテ $\mathfrak{S}$ ハ

weakly totally bounded トナル. 故ニ

定理2. $\mathfrak{S}$ ガ $(\mathfrak{X})$-totally bounded ナラバ, $\mathfrak{S}$ ハ strongly bounded デアル。

定理3. $\overline{B}$ ハ $(\mathfrak{X})$- topologically complete デアル。

証明: (f_λ) ヲ $(\mathfrak{X})$-totally bounded ナ fundamental d.s.p. トスレバ, $|f_\lambda| \leqq C < +\infty$ デアッテ, $x \in B$ ヲ定メレバ $(f_\lambda(x))$ ハ fundamental デアル。

故ニ $\lim\limits_\lambda f_\lambda(x) = f(x)$ ガ存在スル。$\lim\limits_\lambda f_\lambda = f$ ハ $(\mathfrak{X})$-, 従ッテ weakly convergent デアル。故ニ $f(x)$ ハ linear デアッテ, $|f_\lambda(x)| \leqq C$ $(x \in \mathfrak{X})$ ヨリ $|f(x)| \leqq C$ $(x \in \mathfrak{X})$; スナハチ $f \in \overline{B}$. 故ニ $\overline{B}$ ハ $(\mathfrak{X})$- topologically complete デアル。

ヨク知ラレテヰル如ク, $\overline{B}$ ノ conjugate space ヲ $\overline{\overline{B}}$ トスレバ, $\overline{\overline{B}} \supset B$ デアッテ, $\overline{\overline{B}}$ ニ於ケル weak topology ハ, B ノ weak topology トイハレル. B ガ regular ナラバ, 従ッテ weakly topologically complete デアル。

Goldstein ハ B ガ regular ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ, B ガ δ- weakly complete ナ事ナルコトヲ示シタ。[3] 定理1ト3ニヨッテ strongly bounded-

---

3) Goldstein: Weakly complete Banach spaces, Duke Math. J. 4. (1938)

ness ハ weakly totally boundedness ト一致スル。従ツテ δ-weakly completeness ハ topologically completeness ト一致スル．故ニ

Goldstein ノ定理: Bガregular ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ，Bガ weakly topologically complete ナルコトデアル。

Goldstein ノ証明ノ方法ハBガ $\overline{\overline{B}}$ ニ於テ weakly regularly dense ナルコトヲ示スノデアル。

$\overline{B}$ ノ任意ノ linear functional ヲ F（bounded デナクテモヨイ）トスレバ，容易ニ分ル如ク，任意ノ $f_i \in \overline{B}$ $(i=1,2,\cdots\cdots n)$ ニ對シテ，$\varepsilon>0$ ヲ如何ニ小サクトッテモ，$|F(f_i)-f_i(x)|<\varepsilon$ $(i=1,2,\cdots\cdots n)$ ナル $x\in B$ ガアル。スナハチ $\overline{B}$ ノ linear functional 全体ノ space ヲ L $(\supset \overline{\overline{B}})$ トスレバ，B ハ L ニ於テ weakly dense デアル．故ニ B ガ weakly complete ナラバ B＝L デナケレバナラナイ．$\overline{B}$ ノ „Hammel ノ base" ヲ考ヘ，コレヲ $(f_\tau;\ \tau=1,2,\cdots\cdots\omega,\cdots\cdots)$ トスル。

然ルトキハ ξ_τ ヲ任意ニ與ヘタトキ，$F(f_\tau)=\xi_\tau$ ナル $F\in L$ ガ定マル．$|f_\tau|=1$ ナルヤウニ定メテオケバ，$F(f_\tau)=f_\tau(x)$ ナル $x\in B$ ガ存在スルカラ，

$|\xi_\tau|=|F(f_\tau)|=|f_\tau(x)|\leqq|x|$．故ニ $|\xi_\tau|$ ハ有界デナケレバナラナイ．故ニ f_τ ノ個數ハ有限個デアッテ，$\overline{B}$，從ッテ B ハ有限階デナケレバナラナイ。スナハチ weakly complete ナ Banach 空間ハ有限階ノ空間ニ限ルノデアル。[4)]

---

4) G. Birkhoff: Moore-Smith convergence in general topology.

コレニ反シテ regular ナ Banach 空間ハ weakly topologically complete デアル。topologically complete ナル概念ノ重要ナコトガ之レニヨッテ分ル。

7. 群ノ上ノ概週期函數. I. 平均値

群 $\mathfrak{G}$ ニ於テ

$1°$ $\mathfrak{U}_\alpha^{-1} = \mathfrak{U}_\alpha$, $\mathfrak{U}_\alpha \ni 1$.

$2°$ α, β ニ對シテ $\mathfrak{U}_\gamma \subset \mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta$ ナル γ ガ存在スル。

$3°$ α ニ對シテ $\mathfrak{U}_\gamma^2 \subset \mathfrak{U}_\alpha$ ナル γ ガ存在スル.

ナル三條件ヲ滿足スル „單位元ノ近傍系" ガ與ヘラレタトキ

$$\mathfrak{U}_\alpha(x) = \mathfrak{U}_\alpha \cdot x$$

ヲ以テ x ノ近傍系ヲ定義スレバ, $\mathfrak{G}$ ニ, コノ近傍系ニヨッテ uniform topology ガ導入セラレル. コレハ right invariant デアル:

$$\mathfrak{U}_\alpha(x) \cdot a = \mathfrak{U}_\alpha(xa)$$

ソコデコレヲ right invariant ナ uniform topology ト名付ケル。[1)]

$\mathfrak{U}_\alpha$ ガ更ニ

$4°$. $x\,\mathfrak{U}_\alpha x^{-1} = \mathfrak{U}_\alpha$

ヲ滿足スルトキハ, $\mathfrak{U}_\alpha \cdot x = x\,\mathfrak{U}_\alpha$ ダカラ, uniform

---

1) 詳シクハ A. Weil: Sur les espaces à structure uniforme 參照.

topology ハ更ニ left invariant トナル。4° ヲ満足スル uniform topology ヲ invariant uniform topology トヨブコトニスル。

right invariant ナ topology ニ関シテハ $\mathfrak{G}$ ハ必ズシモ topological group トナラナイが, invariant ナ uniform topology ニ関シテハ group ノ演算

$$x^{-1}y$$

が一様連続ニナル. $\mathfrak{G}$ ハ言ハバ uniform topological group トナルノデアル。

right invariant uniform topology が $(\mathfrak{U}_\alpha)$ ニヨッテ與ヘラレタトキ, コレカラ invariant uniform topology ヲ導クーツノ方法ハ

$$\mathfrak{U}_\alpha^* = \prod_{x \in \mathfrak{G}} \cap x\,\mathfrak{U}_\alpha x^{-1}$$

ニヨッテ 4° ヲ満足スル $\mathfrak{U}_\alpha^*$ ヲ作ルノデアル。$\mathfrak{U}_\alpha^*$ ノ意味ハ次ノ様ニ解釈サレル: $a \in \mathfrak{G}$ ヲ, $\mathfrak{G}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ニ寫ス Abbildung:

$$x \longrightarrow x \cdot a$$

ヲ現ハスモノト考ヘル. カク考ヘタトキノ, a ノ $\mathfrak{G}^{\mathfrak{G}}$ ニ於ケル strong topology トシテノ $\mathfrak{U}_\alpha$ ニ對應スル近傍が $\mathfrak{U}_\alpha^*$ トナルノデアル。[2] 實際ニ

2) Nr. 5 参照

$$\mathfrak{U}^*_\alpha \cdot a = (b;\ x\,b \in \mathfrak{U}_\alpha x\ \ a,\ x \in \mathfrak{G})$$

デアル。

$x \to x\cdot a$ ナル Abbildung ハ，明ラカニ同程度ニ一様連続デアルカラ，Nr. 5 定理5ヨリ直チニ次ノ定理ヲ得ル：

定理1. $\mathfrak{G}$ガ$(\mathfrak{U}_\alpha)$ニヨッテ定メラレタ right invariant uniform topology ニ関シテ totally bounded ナラバ，$(\mathfrak{U}_\alpha)$カラ導カレタ$(\mathfrak{U}^*_\alpha)$ニヨッテ定メラレル invariant uniform topology ニツイテモ totally bounded デアル。

$\mathfrak{G}$ニ right invariant ナ距離函数系：

$$\rho^r_k(x\ \ y),\quad \rho^r_k(xa\ \ ya) = \rho^r_k(x\ \ y)$$

（上ノ inden r ハ right invariant ナ事ヲ示ス）ガ與ヘラレタトキ

$$\rho^r_k(x) = \rho^r_k(x\ \ 1)$$

トオケバ，(ρ^r_k)デ定メラレル uniform topology ハ

$$\mathfrak{U}^r_{k_1,\cdots\cdots k_l\,\varepsilon} = (x;\ \rho^r_{k_j}(x) < \varepsilon,\ \ j = 1, 2, \cdots\cdots l)$$

ナル近傍系デ與ヘラレル。コノトキ

$$\rho_k(x\ \ y) = \overline{fin}_{a\in\mathfrak{G}}\ \rho^r_k(ax\ \ ay)$$

トオイテ，(ρ_k)ヲ(ρ^r_k)カラ導ビカレタ invariant ナ距離函数系トヨブコトニスレバ，容易ニ分ル如ク，(ρ_k)

ニ對應スル近傍系ハ丁度 $(\mathfrak{U}^r_{k_1,\cdots\cdots k_l\varepsilon})$ カラ導ビカレタ近傍系 $(\mathfrak{U}^*_{k_1,\cdots\cdots k_l\varepsilon})$ トナル．故ニ定理1ノ特別ノ場合トシテ

定理 I′. $\mathfrak{G}$ ガ right invariant ナ距離函數系 (ρ^r_k) ニ関シテ totally bounded ナラバ (ρ^r_k) カラ導ビカレタ invariant ナ (ρ_k) ニ関シテモ totally bounded デアル。

$\mathfrak{L}$ ヲ $(|u|_k)$ ヲ norm 系トスル topologically complete ナ一般 Banach 空間トシ。$\mathfrak{G}$ デ定義サレタ $\mathfrak{L}$ ノ値ヲトル有界ナ函數 $f(x)$ ヲ考ヘル．但シコヽデ有界トイフノハ，各 k ニツイテ $|f(x)|_k$ ガ有界トイフ意味デアル．

$$\rho^r_{fk}(x\ \ y) = \overline{\mathrm{fin}}_{a\in\mathfrak{G}}|f(xa)-f(ya)|_k$$

及ビ

$$\rho_{fk}(x\ \ y) = \overline{\mathrm{fin}}_{a\in\mathfrak{G}}\ \rho^r_{fk}(ax\ \ ay)$$

$$= \overline{\mathrm{fin}}_{a,b\in\mathfrak{G}}|f(axb)-f(ayb)|_k$$

トオク。

コノ ρ^r_{fk} ヲ用ヒテ $f(x)$ ガ a.p. (almost periodic) デアルトイフコトヲ次ノ様ニ定義スル：

定義 I^r. 距離函數系 (ρ^r_{fk}) ニ関シテ $\mathfrak{G}$ ガ totally bounded ナルトキ；$f(x)$ ハ $\mathfrak{G}$ デ a.p. デアルトイフ。

定理 I′ ニヨレバコノ定義ハ次ノ定義ト同値デアル：

定義Ⅰ. 距離函數系 $(\rho_{f\lambda})$ ニ關シテ $\mathfrak{G}$ ガ totally bounded ナルトキ, $f(x)$ ハ $\mathfrak{G}$ デ a. p. デアルトイフ。

明ラカニ, コノトキ $f(x)$ ハ $(\rho^r_{f\lambda})$ 乃至 $(\rho_{f\lambda})$ デ定メラレル $\mathfrak{G}$ ノ uniform topology ニ關シテ一樣連續デアル. 逆ニ $\mathfrak{G}$ ニ於テ right invariant 或ハ invariant ナ uniform topology ガ定義サレテヰテ, コレニ關シテ $\mathfrak{G}$ ガ totally bounded ナルトキ, $f(x)$ ガコノ topology ニツイテ一樣連續ナラバ $\rho^r_{f\lambda}$ 乃至 $\rho_{f\lambda}$ モ亦一樣連續トナリ, 從ツテ $\mathfrak{G}$ ハ $\rho^r_{f\lambda}$ 乃至 $\rho_{f\lambda}$ ニ關シテ totally bounded トナルカラ, $f(x)$ ハ a. p. デナケレバナラナイ. 故ニ定義Ⅰ或ハⅠ^{r}ハ次ノ樣ニ言フ事ガ出來ル:

定義Ⅱ^r. $f(x)$ ガ $\mathfrak{G}$ ニ於ケル right invariant 且ツ totally bounded ナ uniform topology ニ關シテ一樣連續ナルトキ $f(x)$ ハ a. p. デアルトイフ。

定義Ⅱ $f(x)$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ invariant 且ツ totally bounded ナ uniform topology ニ關シテ一樣連續ナルトキ $f(x)$ ハ a. p. デアルトイフ。

Nr. 4. 定理6ニヨレバ $\mathfrak{G}$ ガ (ρ_λ) ニ關シテ totally bounded トナルタメニハ, $\mathfrak{G}$ ガ各 ρ_λ ニ關シテ totally bounded ナルコトガ必要且ツ充分デアル. 從ツテ $\mathfrak{G}$ ニ於テ幾ツカノ a. p. function $f_\lambda(x)$ ガ與ヘラレタトキ, スベテノ $\rho_{f_\lambda \lambda}$ ヲ合併シテ得ラレル距離函

數系 ($\rho_{f_\lambda k}$) ヲ考ヘレバ, $\mathcal{G}$ ハ ($\rho_{f_\lambda k}$) ニ關シテ totally bounded デアッテ, 又明ラカニ $f_\lambda(x)$ ハ ($\rho_{f_\lambda k}$) ニツイテ一樣連續デアル. コノ事カラ容易ニ次ノ定理ガ得ラレル;

定理2. $f_\lambda(x)$ ($\lambda = 1, 2, \ldots \Lambda$) ガ夫々 $\mathcal{L}_\lambda$ ノ値ヲトル $\mathcal{G}$ ノ上ノ a.p. ナ函數, $u = u(u_1, \ldots u_\Lambda)$ ガ $u_\lambda \in \mathcal{L}_\lambda$ ニツイテ一樣連續ナ函數ナルトキ, $u(x) = u(f_1(x) \ldots f_\Lambda(x))$ ハ a.p. デアル. 特ニ $f(x), g(x)$ ガ a.p. ナルトキ $f \pm g$ モ a.p., 又 $f(x)$ 及ビ numerical function $\alpha(x)$ ガ a.p. ナルトキ $\alpha(x) f(x)$ ハ a.p. デアル。

證明ハ定義II カラ明ラカデアル。

定理3 directed set of function $f_\lambda(x) (\in \mathcal{L}^{\mathcal{G}})$ ガ $f(x)$ ニ一樣ニ收斂スルトキ, 各 $f_\lambda(x)$ ガ a.p. ナラバ $f(x)$ モ a.p. デアル.

又 (ρ_{fk}) ニ關シテハ $\mathcal{G}$ ノ演算ハ一樣連續デアルカラ

定理4. $f(x)$ ガ a.p. ナラバ $f(ax)$, $f(x^{-1})$, etc. ハ a.p. デアル, 又 $f(x^{-1}y)$ etc. ハ $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ ノ上ノ函數トシテ a.p. デアル。

證明: $f(x^{-1})$, $f(x^{-1}y)$, etc. ハスベテ (ρ_{fk}) ニツイテ一樣連續デアルカラ, 定義II ニヨッテ a.p. デアル.

次ニ平均値ノ存在ヲ証明スル。[3)] $\mathfrak{G}$ ノ部分集合 A ニ對シテ $C_v A$ ヲ

$$C_v A = (\sum \alpha_j u_j ;\ \alpha_j \geqq 0,\ \sum \alpha_j = 1,\ u_j \in A)$$

ト定義スル．然ルトキハ

定理5. A ガ totally bounded ナラバ $C_v A$ モ totally bounded デアル。

証明ハ殆ンド明白デアル。

$f(x)$ ガ a. p. ナルトキ

$$W_f = f(\mathfrak{G})$$

トオケバ，W_f ハ totally bounded ナ $\mathfrak{G}$ ノ一様連続ナ像デアルカラ totally bounded デアリ，従ッテ

$$C_v W_f$$

モ totally bounded デアル。

a. p. function $f(x)$ ヲ一ツ定メテ考ヘル．有限個ノ元 $x_1, \cdots\cdots x_m \in \mathfrak{G}$ ヲ任意ニトッテ

$$\varphi_x(a, b) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} f(a x_j b)$$

ナル函數 φ_x ヲ作リ，コノ様ナ函數ノ全体ヲ Φ トスル．然ルトキハ

3) S. Bochner, and J. von Neumann: Almost periodic functions in groups, II. Trans. of Am. Math. Soc. Vol. 37, 1935 参照．以下ノ証明ハコノ Bochner ト Neumann ノ証明ヲ吾々ノ言葉ヲ使ッテ言ヒ換ヘタモノデアル。

補助定理: 任意ノ $K_1, K_2 \cdots\cdots K_h$, $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$\mathrm{Osc}_{K_l}\, \varphi_x = \overline{\mathrm{fin}}_{ab}\ \overline{\mathrm{fin}}_{a'b'} \left| \varphi_x(a\ \ b) - \varphi_x(a'b') \right|_{K_l} < \varepsilon$$

ナル $\varphi_x \in \Phi$ ガ存在スル。

證明: 簡單ノタメ

$$|u|_K = |u|_{K_1} + |u|_{K_2} + \cdots\cdots + |u|_{K_h}$$

トオク. uniform topology ニ関シテハ $|u|_{K_1} \cdots\cdots |u|_{K_h}$ ヲ $|u|_K$ デ置換ヘテヨイ。$\varphi_x(a\ \ b)$ ガ Φ ノ函數ナルトキ, $\varphi_x(a y_j\ \ y_k b)$ モ Φ ニ属シ,

$$\varphi_{yxy}(a\ \ b) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_x(a y_j\ \ y_k b)$$

モ亦 Φ ニ属スル. 然ルニ

$$|\varphi_x(a\ \ b) - \varphi_x(a'\ \ b')|_K$$

$$\leqq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \left(|f(ax_j b) - f(ax_j b')|_K + |f(ax_j b') - f(a'x_j b')|_K \right)$$

ヨリ明ラカナル如ク

$$\rho_{fK}(a, a') < \frac{\varepsilon}{2},\ \rho_{fK}(b\ \ b') < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ナラバ}$$

$$|\varphi_x(a\ \ b) - \varphi_x(a'\ \ b')| < \varepsilon$$

デアル. スナハチ Φ ハ同程度ニ一様連續ナ函數属デアル。

$\mathfrak{G}$ ハ ρ_{fK} ニツイテ totally bounded ダカラ ρ_{fK} ニ関スル $\frac{\varepsilon}{2}$ - Netz ガアル. コレヲ

$$y_1, y_2 \cdots\cdots y_n$$

トスル. 然ルトキハ, ρ_{fK} ガ invariant ナ事カラ, a, b, a', b' ヲ任意ニ與ヘタトキ

$$\rho_{f_k}(ay_1\ \ a'y_s) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \rho_{f_k}(y_1 b\ \ y_t b') < \frac{\varepsilon}{2}$$

ナル. s, t ガ存在スル. 故ニ

$$|\varphi_{yxy}(a\ \ b) - \varphi_{yxy}(a'\ \ b')|$$

$$= \frac{1}{n^2}\left|\sum\sum \varphi_x(ay_j\ \ y_k b) - \sum\sum \varphi_x(a'y_j\ \ y_k b')\right|$$

$$\leqq \frac{1}{n^2}|\varphi_x(ay_1\ \ y_1 b) - \varphi_x(a'y_s\ \ y_t b')| + \frac{n^2-1}{n^2} Osc_k \varphi_x$$

ニ於イテ

$$|\varphi_x(ay_1\ \ y_1 b) - \varphi_x(a'y_s\ \ y_t b')| < \varepsilon$$

トナルカラ

$$Osc_k \varphi_{yxy} \leqq Osc_k \varphi_x - \frac{1}{n^2}(Osc_k \varphi_x - \varepsilon).$$

n ハ ε ノミニ関係シテ定マル. 故ニ

$$B = \operatorname*{fin}_{\varphi_x \in \Phi} Osc_k \varphi_x$$

トスレバ

$$B \leqq \varepsilon$$

故ニ $B = 0$ デナケレバナラナイ。

コノ補助定理ニヨッテ

$$W_{k_1 k_2 \cdots\cdots k_h}\varepsilon$$

$$= (\varphi_x(a, b);\ a \in \mathfrak{g},\ b \in \mathfrak{g},\ Osc_{k_l}\varphi_x < \varepsilon,\ 1 \leqq l \leqq h)$$

トオケバ, $W_{k_1 \cdots\cdots k_h}\varepsilon$ ハ空集合デハナイ. 又明ラカニ

$\varepsilon' \leqq \varepsilon$ ナラバ $W_{k_1 \cdots\cdots k_h \cdots\cdots k_{h+r}}\varepsilon' \subset W_{k_1 \cdots k_h}\varepsilon$

デアルカラ, Π' デ有限積ヲ現ハス事ニスレバ

1° $\Pi' W_{k_1 \cdots\cdots k_h}\varepsilon \neq 0$

次ニ，$Osc_{K_l}\varphi_x<\varepsilon$，$Osc_{K_l}\varphi_y<\varepsilon$ トスレバ

$$\left|\varphi_x(a\ \ b)-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f(cx_j\cdot d)\right|_{K_l}<\varepsilon$$

$$\left|\varphi_y(a'\ \ b')-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(cy_k d)\right|_{K_l}<\varepsilon$$

ヨリ

$$\left|\varphi_x(a\ \ b)-\frac{1}{nm}\sum_j\sum_k f(x_j\ y_k)\right|_{K_l}<\varepsilon$$

$$\left|\varphi_y(a'\ \ b')-\frac{1}{nm}\sum_j\sum_k f(x_j\ y_k)\right|_{K_l}<\varepsilon$$

ヲ得ルカラ

$$|\varphi_x(a\ \ b)-\varphi_y(a'\ \ b')|_{K_l}<2\varepsilon$$

故ニ，d_{K_l} ヲ以テ直径ヲ現ハスコトニスレバ

2° $\quad d_{K_l}(W_{K_1\cdots\cdots K_h\varepsilon})\leqq 2\varepsilon$

1° ト 2° ハ $(W_{K_1\cdots\cdots K_h\varepsilon})$ ガ *Cauchy family* ナルコトヲ示ス．明ラカニ

$$W_{K_1\cdots\cdots K_h\varepsilon}\subset C_v W_f\subset (C_v W_f)^b$$

デアッテ，$C_v W_f$ ハ *totally bounded*，従ッテ $(C_v W_f)^b$ ハ *complete* デアルカラ $(W_{K_1K_2\cdots\cdots K_l\varepsilon})$ ハ一点ニ収斂スル．コノ極限ヲ $f(x)$ ノ平均値ト呼ビ Mf デ現ハス：

$$Mf=\underset{x}{M}f(x)=\lim W_{K_1\cdots\cdots K_h\varepsilon}$$

Mf ハ $(W_{K_1\cdots\cdots K_l\varepsilon})^b$ ニ含マレルカラ，φ_x ヲ適当ニトッテ

$$|Mf-\varphi_x(a\ \ b)|_{K_l}\leqq 2\varepsilon$$

ナラシメルコトガ出来ル．逆＝任意ノ $k_1 \cdots\cdots k_h$，ε ＝対シテ

$$|M - \varphi_x(a\ \ b)|_{k_l} < \varepsilon$$

ナル φ_x ガ存在スルナラバ，$\mathrm{Osc}_{k_l}\varphi_x \leqq 2\varepsilon$ トナルカラ，$M = Mf$ デナケレバナラナイ．故＝

定理 6．$f(x)$ ノ平均値ヲ Mf トスレバ，任意ノ $k_1 \cdots \cdots k_h$，$\varepsilon > 0$ ＝対シテ，$x_1\ x_2 \cdots\cdots x_m$ ヲ適當＝選ンデ，a, b ノ如何＝関セズ

$$\left| Mf - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f(a x_j \cdot b) \right|_{k_l} < \varepsilon$$

ナラシメルコトガ出来ル．逆＝，コノ様ナ constant Mf ハ平均値ノ他＝ハナイ。

コノ定理 6 カラ容易＝次ノ定理ガ得ラレル：

定理 7．

i) $f(x) = u$ ナラバ $\underset{x}{M} f(x) = u$

ii) $M(\alpha f + \beta g) = \alpha Mf + \beta Mg$

iii) $\underset{x}{M} f(ax\ b) = \underset{x}{M} f(x)$

iv) $\underset{x}{M} f(x^{-1}) = \underset{x}{M} f(x)$

v) $\underset{x}{M} |f(x)|_k \geqq |\underset{x}{M} f(x)|_k$

$\phi(x)$ ガ numerical a. p. function ナルトキ

$$|\underset{y}{M}\phi(y) f(y^{-1}x) - \underset{y}{M}\phi(y) f(y^{-1}z)|_k$$

$$\leqq \underset{y}{M}|\phi(y)||f(y^{-1}x)-f(y^{-1}z)|_k \leqq \rho_{fk}(x\ \ z)\underset{y}{M}|\phi(y)|$$

故ニ $\underset{y}{M}\phi(y)f(y^{-1}x)$ ハ x ノ a. p. function デアル.

コレヲ

$$\phi\times f(x)$$

デ現ハス. 明ラカニ

$$\phi\times f(x)=\underset{y}{M}\phi(y)f(y^{-1}x)=\underset{y}{M}\phi(xy^{-1})f(y)$$

8. 群ニ於ケル概週期函數 II. 近似ノ理論

一般ニ $\rho(x\ \ y)=\rho(xy^{-1})$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ totally bounded 且ツ invariant ナ metric ナルトキ, $\rho(x)$ ハ ρ ニツイテ一様連續, 從ツテ a. p. デアルカラ

$$\omega_\delta(t)=\begin{cases}0 & \text{for}\quad t\geqq\delta\\ 1-\dfrac{2t}{\delta} & 0\leqq t<\delta\end{cases}$$

トスレバ, $\omega_\delta(\rho(x))$ モ a. p. デアッテ

$$\Delta_\delta(\rho;x)=\frac{\omega_\delta(\rho)\times\ \omega_\delta(\rho(x))}{[\underset{x}{M}\,\omega_\delta(\rho(x))]^2}$$

トオケバ, $\Delta_\delta(\rho;x)$ ハ次ノ性質ヲ有スル.

1) $\Delta_\delta(\rho;x)\geqq 0$

2) $\underset{x}{M}\,\Delta_\delta(\rho;x)=1$

3) $\rho(x)\geqq\delta$ ナラバ $\Delta_\delta(x)=0$

4) $\Delta_\delta(\rho;x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_{\delta\nu}\,l_\nu(x)$

但シココデ $e_\nu(x)$ ハ，$\mathcal{G}$ ノ既約 unitary 表現

$D^{(\nu)}(x)=(d_{ik}(x))$ カラ

$$e_\nu(x)=n^{(\nu)}\sum_i d_{ii}(x),\quad n^{(\nu)} \text{ハ } D^{(\nu)}, \text{ Grad}$$

ニヨッテ作ラレタ函数トスル．$\alpha\delta_\nu$ ハ

$$0 \leqq \alpha\delta_\nu \leqq 1$$

ナル constant デ

$$\lim_{\delta\to 0}\alpha\delta_\nu=1$$

デアル．又 4) ナル級數ハ絶對且ツ一様ニ收斂スル。

簡單ノタメ，$k_1 k_2 \cdots\cdots k_h$ 及ビ正數 δ ノ組ヲ σ デ現ハスコトニスル，

$$\sigma=(k_1 k_2 \cdots\cdots k_h\,\delta)$$

(σ) ナル index ノ集合ハ，$\sigma=(k_1 \cdots\cdots k_h\,\delta)$ 及ビ $\sigma'=(k_1' \cdots\cdots k_m'\,\delta')$ ニツイテ，各 k_j ガ或 k_l' ト一致シ，且 $\delta>\delta'$ ナルトキ

$$\sigma<\sigma'$$

ト考ヘレバ，directed set トナル。

f ヲ與ヘラレタ a. p. function トシ

$$\rho f k_1 \cdots\cdots k_h=\sum_{l=1}^{h}\rho f k_l$$

又

$$\Delta f\sigma(x)=\Delta f k_1\cdots\cdots k_h\delta(x)=\Delta_\delta(\rho f k_1\cdots k_h;x)$$

トオク．然ルトキハ k_l ヲ σ ニ含マレル index ノ一ツトスレバ

$$\left|\Delta f_\sigma \times f(x)-f(x)\right|_{\kappa_l}=\left|\underset{y}{M}\Delta f_\sigma(xy^{-1})f(y)-f(x)\right|_{\kappa_l}$$

$$=\left|\underset{y}{M}\Delta f_\sigma(xy^{-1})(f(y)-f(x))\right|_{\kappa_l}\leqq\underset{y}{M}\,\Delta f_\sigma(xy^{-1})\left|f(y)-f(x)\right|_{\kappa_l}$$

ニ於テ

$\Delta f_\sigma(xy^{-1})\neq 0$ ナラバ

$$|f(y)-f(x)|_{\kappa_l}\leqq\rho f\kappa_1 \cdots\cdots (x\ \ y)\leqq\delta$$

デアルカラ

$$\left|\Delta f_\sigma\times f(x)-f(x)\right|_{\kappa_l}\leqq\delta\qquad(1\leqq l\leqq h)$$

スナハチ

定理 1. $\lim_\sigma \Delta f_\sigma \times f(x)=f(x)$ (一様收斂)

然ルニ

$$\Delta f_\sigma=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_{\sigma\nu}\, l_{\sigma\nu}(x)$$

ハ絶對且ツ一様ニ收斂シテ居ルカラ, N_σ ヲ充分大キクトツテ

$$\left|\Delta f_\sigma(x)-\sum_{\nu=1}^{N_\sigma}\alpha_{\sigma\nu}\, l_{\sigma\nu}(x)\right|<\delta$$

ナラシメルコトが出来ル。コレヲ上ノ式ニ入レレバ

$$\left|\sum_{\nu=1}^{N_\sigma}\alpha_{\sigma\nu}\, l_{\sigma\nu}\times f(x)-f(x)\right|_{\kappa_l}\leqq\delta\left(1+\underset{x}{M}|f(x)|_{\kappa_l}\right)$$

故ニ

定理 2. $\lim_\sigma \sum_{\nu=1}^{N_\sigma}\alpha_{\sigma\nu}\, l_{\sigma\nu}\times f(x)=f(x)$ (一様收斂)

コンデ明ラカニ

$$e_{\sigma\nu} \times f(x) = n^{(\sigma\nu)} \sum_{ij} \left(\underset{y}{M} f(y) \overline{d_{ij}^{(\sigma\nu)}(y)} \right) d_{ij}^{(\sigma\nu)}(x)$$

デアルカラ，定理2ハ a.p. ナ $f(x)$ ハ unitary 表現ノ一次結合ノ limit ナコトが分ル。